Tímarit um raunvísindi og stærðfræði
2. árg. 1. hefti 2004 – raust.is/2004/1/01

Lyapunov-föll og reiknirit til smíði þeirra

Sigurður Freyr Hafstein

University Duisburg-Essen, Germany

Handrit: 16. febrúar 2004

Ágrip Í doktorsritgerð höfundar [7] og tengdri grein [8] er sett fram reiknirit, sem varpar verkefnum varðandi smíði Lyapunov-falla í verkefni í línulegri bestun. Slíkt verkefni í línulegri bestun hefur þann eiginleika, að út frá sérhverri gjaldgengri lausn þess má stika samfellt línulegt fall á köflum, sem er strangt Lyapunov-fall fyrir hreyfikerfið sem notað var við útleiðslu þess. Reikniritið er fyrsta almenna reikniritið til smíði Lyapunov-falla fyrir ólínuleg kerfi. Í þessari grein fjöllum við um hreyfikerfi og Lyapunov-föll, reikniritið, sannanir á því að ávallt sé hægt að nota það til þess að smíða Lyapunov-fall [1] og gefum nokkur dæmi um Lyapunov-föll fyrir ólínuleg kerfi stikuð með hjálp reikniritsins. Í viðauka í lok greinarinnar er svo farið nokkuð nákvæmar í stærðfræðina sem að baki liggur og stuttar sannanir á megin niðurstöðum greinarinnar eru gefnar.

Hreyfikerfi, jafnvægispunktar og Lyapunov-föll

Aðalviðfangsefni stærð- og verkfræðilegrar stýrifræði eru jafnvægispunktar hreyfikerfa og aðdráttarmengi þeirra. Við rannsóknir slíkra punkta eru fræði kennd við rússneska stærð- og verkfræðinginn Alexander M. Lyapunov almennt álitin skila notadrýgstu aðferðunum. Grundvallarhugmynd Lyapunov-fræðanna er sú að varpa spurningum varðandi stöðugleika jafnvægispunkta yfir í spurningar varðandi tilvist svokallaðs Lyapunov-falls fyrir kerfið. (Strangt) Lyapunov-fall er hin stærðfræðilega útvíkkun eðlisfræðihugtaksins *orka* og er samfellt raungilt fall af ástandsbreytum kerfisins, sem hefur nákvæmlega eitt lággildi og er (stranglega) minnkandi á sérhverri braut hreyfikerfisins. Í þessari grein munum við fjalla um ströng Lyapunov-föll fyrir tímaóháð samfelld hreyfikerfi, sem hægt er að lýsa með venjulegum afleiðujöfnuhneppum $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Fyrir slíkt kerfi er tilvist strangs Lyapunov-falls jafngilt tilvist aðfellustöðugs jafnvægispunkts. Það að tilvist strangs Lyapunov-falls sé nægjanlegt skilyrði sannaði Lyapunov sjálfur í doktorsritgerð sinni 1892 (ensk þýðing í [5]). Það að tilvist slíks falls sé nauðsynlegt skilyrði, svokallaðar andhverfusetningar, var uppgötvað mun síðar eða um miðja síðust öld [6, 9, 10] og sannanirnar voru hreinar tilvistarsannanir, án nokkurs möguleika á því að nota þær til þess að leiða út almenna formúlu fyrir Lyapunov-föll.

Sú hugmynd Lyapunovs að útvíkka skilgreiningu orkunnar til að rannsaka stöðugleika jafnvægispunkta hreyfikerfa hefur reynst gjöful og er almennt álitin notadrýgsta aðferðin við slíkar rannsóknir. Slíkar rannsóknir hafa mikið hagnýtt gildi og eru eitt helsta viðfangsefni stýrifræði. Til dæmis eru vélar hreyfikerfi og hafa nær undantekningarlaust einhvern ákveðinn ætlaðan vinnupunkt eða eitthvert ákveðið ætlað vinnuferli í ástandsrúmi sínu. Ef ástand vélarinnar er ekki í nágrenni þessa punkts eða ferlis er voðinn vís. Annaðhvort vinnur vélin ekki þá vinnu sem hún á að framkvæma eða hún eyðileggst vegna þess að hún er ekki byggð til að þola það ástand sem hún er í. Af þessu leiðir að vinnupunktur hreyfikerfisins verður að vera stöðugur jafnvægispunktur (skilgreint síðar), því annars gætu minnstu truflanir á ástandi þess orsakað miklar truflanir síðar. Þau vísindi að byggja vélar á þann hátt að vinnupunktur þeirra sé stöðugur jafnvægispunktur eru viðfangsefni verkfræðilegrar stýrifræði. Þar sem að flestum mikilvægum hreyfikerfum er hægt að lýsa með venjulegum afleiðujöfnuhneppum er það tilfelli áhugaverðast.

Látum

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{1}$$

vera tímaóháð venjulegt afleiðujöfnuhneppi, þar sem vörpunin $\mathbf{f} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ er tvisvar samfellt deildanleg vörpun á svæðinu $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, og þannig að $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ fyrir einhvern punkt $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$. Það að $\mathbf{f}$ sé samfellt deildanleg vörpun á $\mathcal{U}$ tryggir að (1) hafi ótvírætt ákvarðaða lausn $t \mapsto \boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{\xi})$ fyrir sérhvert upphafsgildi $\phi(0,\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}$ og af $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ leiðir að $\phi(t,\mathbf{a}) := \mathbf{a}$ er lausn (1) með upphafskilyrðið $\mathbf{a}$, þ.e. $\mathbf{a}$ er *jafnvægispunktur* kerfisins. Þar sem (1) er óháð hliðrun má allt eins gera ráð fyrir því að $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ og munum við gera það í því sem á eftir kemur. Hnitamiðjan er nefndur *stöðugur jafnvægispunktur* kerfisins, þ.þ.a.a. kerfið sé ónæmt fyrir (litlum) truflunum í nágrenni hnitamiðjunnar. Á máli stærðfræðinnar þýðir það að fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ er til $\delta > 0$, þ.a.

$$\|\boldsymbol{\xi}\|_2 < \delta \;\Rightarrow\; \|\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{\xi})\|_2 < \varepsilon \text{ fyrir öll } t \geq 0.$$

Stöðugleiki hnitamiðjunar eða eitthvert álíka skilyrði er lágmarkskrafa þess að hann komi til greina sem vinnupunktur ef (1) er lýsing hreyfifræði vélar eða tækis. Yfirleitt er að auki a.m.k. ætlast til þess að hnitamiðjan sé aðdráttarpunktur og að mengi þeirra punkta sem dragast að aðdráttarpunktinum $\mathcal{R}_{\text{Att}} := \{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U} \,\big|\, \limsup_{t\to+\infty} \|\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{\xi})\|_2 = 0\}$ sé grennd hnitamiðjunar. Í þessu tilfelli er hnitamiðjan nefnd aðfellustöðug. Oft og tíðum er það einnig æskilegt að hnitamiðjan sé ekki einungis aðfellustöðug, heldur einnig að þessi eiginleiki sé harðger gagnvart minniháttar villum í líkanagerðinni í þeim skilningi, að hnitamiðjan sé aðfellustöðugur punktur fyrir öll kerfi $\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$, þar sem $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\|_2 \leq \varepsilon\|\mathbf{x}\|_2$ fyrir eitthvert nógu lítið $\varepsilon > 0$. Veldisvísisstöðugleiki hnitamiðjunar tryggir þessa harðgerð. Hnitamiðjan heitir *veldisvísisstöðugur jafnvægispunktur* fyrir (1), þ.þ.a.a. til séu fastar $m \geq 1$ og $\alpha > 0$ þannig að

$$\|\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{\xi})\|_2 \leq m e^{-\alpha t}\|\boldsymbol{\xi}\|_2$$

fyrir öll $t \geq 0$ og öll $\boldsymbol{\xi}$ í einhverri grennd hnitamiðjunnar.

Strangt Lyapunov-fall fyrir kerfið (1) er samfellt fall $V : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, þar sem $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ er opin grennd hnitamiðjunar, sem uppfyllir eftirtalin skilyrði:

(L1) $V(\mathbf{0}) = 0$ og $V(\mathbf{x}) > 0$ fyrir öll $\mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$.

(L2) Fyrir sérhvert $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{V}$ er fallið $t \mapsto V(\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{\xi}))$ stranglega [1] fallandi á skilgreiningarmengi sínu.

Skilyrðið **(L1)** tryggir að hnitamiðjan sé eina lággildi Lyapunov-fallsins og af skilyrðinu **(L2)** leiðir að

$$\lim_{t\to+\infty} V(\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{\xi})) = 0, \text{og þar með}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0},$$

fyrir öll $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{R}_V$, þar sem $\mathcal{R}_V$ er sammengi allra þjappaðra samhengisþátta formynda $V^{-1}([0,c])$ í $\mathcal{V}$, $c > 0$, sem innihalda hnitamiðjuna. Þar með er hnitamiðjan aðfellustöðugur jafnvægispunktur afleiðujöfnuhneppisins (1) og $\mathcal{R}_V$ er hlutmengi aðdráttarmengisins $\mathcal{R}_{\text{Att}}$. Nægjanlegt skilyrði til að $t \mapsto V(\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{\xi}))$ sé stranglega fallandi er að

$$D_t^+ V(\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{\xi})) := \limsup_{s\to 0+} \frac{V(\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{\xi}) + s\mathbf{f}(\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{\xi}))) - V(\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{\xi}))}{s} < 0$$

fyrir öll $\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{V}$. Ef V er sammfellt deildanlegt fall þá einfaldast þetta skilyrði enn meir, því

$$\begin{aligned} D_t^+ V(\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{\xi})) &= \frac{d}{dt} V(\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{\xi})) \\ &= \nabla V(\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{\xi})) \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}(t,\boldsymbol{\xi}) \\ &= \nabla V(\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{\xi})) \cdot \mathbf{f}(\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{\xi})) < 0, \end{aligned}$$

og þar með nægir að sýna að $\nabla V(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) < 0$ fyrir öll $\mathbf{x} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$ til þess að skilyrðinu **(L2)** sé fullnægt. Þetta er nákvæmlega ástæðan fyrir því að Lyapunov-föll eru svo gagnleg. Það er hægt að sýna fram á skilyrðin **(L1)** og **(L2)** án þess að þekkja lausn afleiðujöfnuhneppisins (1). Vart þarf að taka fram að lausnin $\boldsymbol{\phi}$ er almennt ekki þekkt og í þeim undantekningartilfellum sem hún er þekkt er lítil þörf á Lyapunov-falli til að rannsaka stöðugleika jafnvægispunkta.

Tilvist Lyapunov-falla

Eins áður var minnst á var uppgötvað um miðja síðustu öld að af stöðugleika jafnvægispunkts leiði tilvist Lyapunov-falls fyrir hreyfikerfið. Stærðfræðisetningar því að lútandi eru nefndar andhverfusetningar í hreyfikerfafræðum og munum við fjalla um hina hefðbundnu útleiðslu andhvefusetninganna í þessum hluta greinarinnar. Fyrir það sem á eftir kemur er þægilegt að tákna mengi stranglega vaxandi óendanlega oft deildanlegra falla $\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ sem eru núll í núlli með $\mathcal{K}$ og mengi stranglega minnkandi óendanlega oft deildanlegra falla $\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ sem hafa markgildið núll í óendanlegu með $\mathcal{L}$.

Andhverfusetningin fyrir aðfellustöðuga hnitamiðju byggir á lemmu Massera, sem segir að fyrir sérhvert fall $\sigma \in \mathcal{L}$ og fasta $\lambda > 0$ sé til fall $\gamma \in \mathcal{K}$, þ.a. $\dot{\gamma} \in \mathcal{K}$,

$$\int_0^{+\infty} \gamma(\sigma(\tau))\, d\tau < +\infty$$

og

$$\int_0^{+\infty} \dot{\gamma}(\sigma(\tau)) e^{\lambda\tau} d\tau < +\infty.$$

[1] Án *stranglega* er V venjulegt Lyapunov-fall.

Sönnunin á því að fyrir hreyfikerfið (1) sé til Lyapunov-fall skilgreint á $B_r := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \big| \|\mathbf{x}\|_2 \leq r\}$ ef hnitamiðjan er aðfellustöðugur jafnvægispunktur og $B_r \subseteq \mathcal{R}_{\text{Att}}$ byggir í grófum dráttum á því að gera sér fyrst grein fyrir því að í þessu tilfelli eru til föll $\sigma \in \mathcal{L}$ og $\psi \in \mathcal{K}$, þ.a. fyrir lausnina $\boldsymbol{\phi}$ á (1) gildi ójafnan

$$\|\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{\xi})\|_2 \leq \psi(\|\boldsymbol{\xi}\|_2)\sigma(t)$$

fyrir öll $\boldsymbol{\xi} \in B_r$ og öll $t \geq 0$. Síðan er sýnt að

$$V(\boldsymbol{\xi}) := \int_0^{+\infty} \gamma(\|\boldsymbol{\phi}(\tau,\boldsymbol{\xi})\|_2)\, d\tau \tag{2}$$

sé Lyapunov-fall fyrir kerfið, þar sem

$$\lambda := \sup_{\mathbf{x}\in B_r} \|\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x})\|_2, \qquad \gamma, \dot{\gamma} \in \mathcal{K},$$

$$\int_0^{+\infty} \gamma(\psi(r)\sigma(\tau))\, d\tau < +\infty$$

og

$$\int_0^{+\infty} \dot{\gamma}(\psi(r)\sigma(\tau))e^{\lambda\tau} d\tau < +\infty.$$

Ef hnitamiðjan er veldisvísisstöðugur jafnvægispunkur hreyfikerfisins (1) er hægt að sýna fram á töluvert meira, nefninlega að til sé Lypaunov-fall af ferningsgerð fyrir kerfið. Það að Lyapunov-fall V sé af ferningsgerð þýðir að til séu fastar $a, b, c > 0$, þ.a.

$$a\|\mathbf{x}\|_2^2 \leq V(\mathbf{x}) \leq b\|\mathbf{x}\|_2^2 \text{ og}$$
$$\nabla V(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq -c\|\mathbf{x}\|_2^2.$$

Þetta má sanna með því að nota niðurstöðurnar að ofan, eða beint með því að skoða fallið

$$V(\mathbf{x}) := \int_0^{+\infty} \|\boldsymbol{\phi}(\tau,\mathbf{x})\|_2^2 \; d\tau. \tag{3}$$

Í hinu mikilvæga sértilfelli að (1) sé línulegt, þ.e. að $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ fyrir $n \times n-$fylki A, er hægt að nota formúluna (3) til þess að setja fram nothæfa formúlu fyrir Lyapunov-falli. Hún er

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \left(\int_0^{+\infty} e^{(A+A^T)\tau} d\tau \right) \mathbf{x} \tag{4}$$

og fylkið $\int_0^{+\infty} e^{(A+A^T)\tau} d\tau$ má reikna út á skilvirkan hátt sem hina ótvíræðu stranglega jákvætt-ákveðnu lausn P fylkjajöfnunar

$$PA + A^T P = -I, \tag{5}$$

þar sem I er einingarfylkið af vídd n. Það skal tekið fram að fyrir línulegt kerfi er aðfellustöðugleiki jafngildur veldisvísisstöðugleika og hvort tveggja gildir, þ.þ.a.a. öll eigingildi fylkisins sem skilgreinir kerfið hafi stranglega neikvæða raunhluta.

Mikilvægi línulega tilfellisins fellst í því að hnitamiðjan er veldisvísisstöðugur jafnvægispunktur fyrir (1), þ.þ.a.a. öll eigingildi Jacobi-fylkis $\mathbf{f}$ í núll hafi stranglega neikvæðan raunhluta og (4) er Lyapunov-fall fyrir kerfið, þar sem A er Jacobifylkið í núlli, á einhverri grennd hnitamiðjunar. Takmörkun þessa Lyapunov-falls er sú, að það er í raun víðfeðma Lyapunov-fall línugerða kerfisins og uppfyllir skilyrðið **(L2)** fyrir afleiðujöfnuhneppið (1) einungis í þeirri grennd um hnitamiðjuna þar sem línulega nálgunin er nógu góð. Afleiðing þessa er að út frá þessu Lyapunov-falli er í fæstum tilfellum unnt að fá nokkuð skynsamlegt mat á stærð aðdráttarmengisins $\mathcal{R}_{\text{Att}}$ og gefur þar með ekkert skynsamlegt mat á það hversu mikla truflun kerfið þolir.

Í gegnum tíðina hefur verið stungið upp á fjölmörgum aðferðum til smíði Lyapunov-falla. Nákvæmar aðferðir byggja t.d. á því að reyna að smíða fall $\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ þannig að $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) < 0$ og $\partial_i v_j = \partial_j v_i$, því þá er

$$V(\mathbf{x}) := \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{x}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$

nothæft Lyapunov-fall, eða á því að hreyfikerfið hafi einhverja skynsamlega skilgreinda eðlisfræðilega orku. Tölulegar aðferðir byggjast yfirleitt á einhverjum (ströngum) skilyrðum, t.d. á því að fallið $\mathbf{f}$ sé línulegt á köflum og/eða því (oftast í einhverju vel földu skrefi) að eitthvert ferli gangi upp, án þess að fyrir því sé nokkur sérstök ástæða. Í [7, 8] eru upptalningar ásamt stuttum skýringum á nokkrum aðferðum sem stungið hefur verið upp á.

Smíði Lyapunov-falla með línulegri bestun

Í þessum hluta munum við fjalla um reiknirit höfundar til smíði Lyapunov-falla og hvernig hægt er að nota andhverfusetningarnar úr síðasta hluta til þess að sanna að reikniritið sé traust í þeim skilningi, að með því muni alltaf takast að reikna út einfalda formúlu fyrir Lyapunov-falli, svo framarlega að slíkt fall sé yfir höfuð til. Reikniritið notar línulega bestun og við byrjum á því að gera henni stutt skil.

Verkefni í línulegri bestun er safn línulegra skorða (constraints) ásamt línulegu felli. Verkefnið fellst í því að lágmarka fellið á menginu sem skilgreint er af línulegu skorðunum. Það eru nokkrar jafngildar leiðir við að setja fram verkefni í línulegri bestun. Ein af þeim er

$$\text{lágmarka } \mathbf{x} \mapsto \mathbf{c}^T\mathbf{x}, \tag{6}$$
$$\text{m.t.t. skorðanna } C\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

þar sem $r, s > 0$ eru heilar tölur, $C \in \mathbb{R}^{s\times r}$ er fylki, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^s$ og $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^r$ eru vigrar og $\mathbf{x} \le \mathbf{y}$ þýðir $x_i \le y_i$ fyrir öll i. Fellið $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ er kallað kostnaðarfall línulega verkefnisins og skilyrðin $C\mathbf{x} \le \mathbf{b}$ og $\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$ eru saman kallaðar skorðurnar. Gjaldgeng lausn línlega bestunarverkefnisins er vigur $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^r$ sem uppfyllir skorðurnar, þ.e. $\mathbf{y} \ge \mathbf{0}$ og $C\mathbf{y} \le \mathbf{b}$. Fjölmörg reiknirit eru þekkt til að leysa línuleg bestunarverkefni, t.d. hið þekkta hyrnurit [12] eða innri punkta reiknirit [11]. Við rannsóknir sínar hefur höfundur aðallega notað hyrnuritið í GLPK 3.2.2 frá Andrew Makhorin sem hefur m.a. þann kost að vera ókeypis og því fylgir góð handbók (http://www.gnu.org/software/glpk/glpk.html).

Í doktorsritgerð höfundar [7] og tengdri grein [8] er sett fram reiknirit, sem varpar verkefnum varðandi smíði Lyapunov-falla í verkefni í línulegri bestun. Slíkt verkefni í línulegri bestun hefur þann eiginleika, að út frá sérhverri gjaldgengri lausn þess má stika samfellt línulegt fall á köflum, sem er Lyapunov-fall fyrir hreyfikerfið sem notað var við útleiðslu þess. Ekki er þörf fyrir kostnaðarfall línulega bestunarverkefnisins þar sem út frá sérhverri gjaldgengri lausn má stika Lyapunov-fall, en mögulegt er að nota kostnaðarfallið til að velja Lyapunov-fall með einhverja sérstaka eiginleika .

Hugmyndin að baki þessari aðferð er sú að fyrst er skilgreiningarmengi Lyapunov-fallsins sem reikna á út bútað niður í n-hyrnur þ.a. það nægi að gefa upp fallgildi í hornpunktum n-hyrnanna til þess að skilgreina ótvírætt samfellt línulegt fall á köflum. Síðan er línulegt bestunarverkefni notað til þess að reikna út Lyapunov-fallið með því að reikna fallsgildi þess í hornpunktunum. Það að út frá úttaki reikniritsins megi alltaf stika Lyapunov-fall er svo hægt að sanna með því að sýna fram á að línulega bestunarverkefnið hafi gjaldgenga lausn ef mengi Lyapunov-falla fyrir kerfið er ekki tómt.

Þar sem Lyapuonv-fallið er skilgreint út frá fallsgildum í hornapunktum n-hyrnanna og á að vera línulegt á köflum er nauðsynlegt og nægjanlegt að sniðmengi sérhverra tveggja n-hyrna sé k-hyrna, $k < n$, skilgreind af sameiginlegum hornpunktum n-hyrnanna. Þessu markmiði er náð með því að búta $[0,1]^n$ í $n!$ n-hyrnur af gerðinni

$$S_\alpha := \{\mathbf{x} \in [0,1]^n \big| x_{\alpha(1)} \le x_{\alpha(2)} \le \ldots \le x_{\alpha(n)}\},$$

þar sem α hleypur yfir öll stök uppstokkunargrúppu $\{1, 2, \ldots, n\}$. Með hliðrunum, speglunum og skölun á þessari bútun má síðan búta allt skilgreiningarmengið á samsvarandi hátt eftir þörfum.

Nákvæm framsetning skorða og sönnun þess að gjaldgeng lausn þeirra stiki Lyapunov-fall er mjög löng. Sönnun á því að alltaf sé hægt að stika Lyapunov-fall með línulega bestunarverkefninu ef hnitamiðjan er aðfellustöðugur jafnvægispunktur og útleiðsla formúlu fyrir bútun sem leiðir til tryggrar tilvistar gjaldgengrar lausnar línulega bestunarverkefnisins ef hnitamiðjan er aðfellustöðug er ennþá lengri. Hér látum við nægja að stikla á stóru varðandi þessi atriði en vísum að öðru leiti til viðaukans, þar sem því sama eru gerð nokkuð nákvæmari skil, og til [1, 2, 7, 8] fyrir nákvæmar sannanir.

Ljóst ætti að vera að lítil vandkvæði eru á að útfæra skilyrðið **(L1)** sem línulega skorðu, vandamálið er að útfæra skilyrðið **(L2)**. Í grófum dráttum er **(L2)** tryggt með því að krefjast þeass á sérhverri n-hyrnu $\mathcal{H}$ bútunarinnar að

$$-\|\mathbf{x}\|_2^2 \ge \nabla V_{\mathcal{H}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) + E_{\mathcal{H}} \|\nabla V_{\mathcal{H}}\|_1 \qquad (7)$$

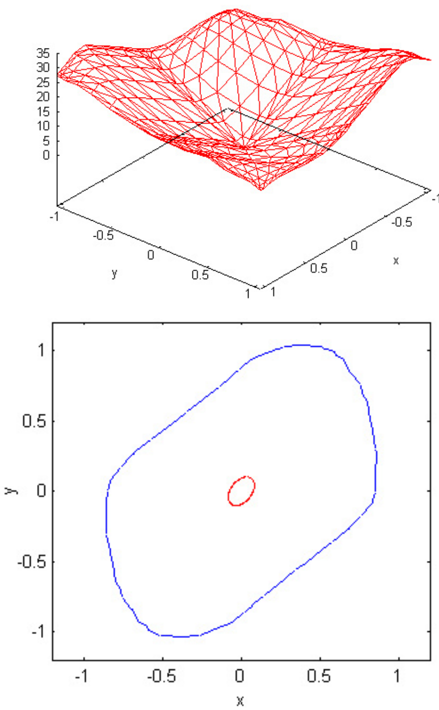
fyrir alla hornpunkta $\mathbf{x}$ n-hyrnunnar, þar sem $\nabla V_{\mathcal{H}}$ er stigull Lyapunov-fallsins V á n-hyrnunni $\mathcal{H}$ og $E_{\mathcal{H}}$ er fasti sem tryggir að

$$-\|\mathbf{y}\|_2^2 \ge \nabla V_{\mathcal{H}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y})$$

fyrir öll $\mathbf{y} \in \mathcal{H}$, ef (7) er uppfyllt fyrir alla hornpunkta. Það að $\mathbf{f}$ í (1) sé tvisvar samfellt deildanlegt fall er notað við útleiðslu formúlu fyrir fastann $E_{\mathcal{H}}$.

Sönnun höfundar á því að alltaf sé hægt að ákvarða Lyapunpov-fall út frá línulega bestunarverkefninu ef hnitamiðjan er aðfellustöðugur jafnvægispunktur byggist á því að velja nógu smámöskva hyrnubútun í aðdráttarmengi hnitamiðjunar, setja síðan gildi Lyapunov-fallsins (2) inn í skorðurnar og sýna svo fram á að allar ójöfnur séu uppfylltar. Þetta sannar að mengi gjaldgengra lausna verkefnisins er ekki tómt og þar sem til eru reiknirit sem finna gjaldgenga lausn ef slík lausn er til er þetta sönnun á því að alltaf sé hægt að stika Lyapunov-fall út frá úttaki reikniritsins. Athuga ber að gildi Lyapunov-fallsins í (2) eru ekki þekkt heldur byggja einungis á tilvistarsetningu. Það sama er uppi á teningnum ef hnitamiðjan er veldisvísisstöðug, nema hvað, að í því tilfelli er hægt að nota Lyapunov-fallið í (3) og leiða út nákvæma formúlu fyrir hyrnubútuninni.

Í báðum sönnununum verður að skera út einhverja grennd $\mathcal{D}$ hnitamiðjunar úr skilgreiningarmengi Lyapunov-fallsins. Grenndin má vera eins lítil og vera vill og getur þetta því ekki talist stór galli. Ef hnitamiðjan er veldisvísisstöðug er hvort eð er ávallt mögulegt að reikna út (lítið) undirmat $\mathcal{R}$ á $\mathcal{R}_{\text{Att}}$ um hnitamiðjuna með línugeringu (1) og með því að láta $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}$ tapast engar upplýsingar. Ef hnitamiðjan er einungis aðfellustöðug er þetta stærri galli, því engin almenn aðferð gefur undirmat á



Mynd 1. Að ofan er graf Lyapunov-falls fyrir verkefni (8), stikað út frá lausn viðkomandi bestunarverkefnis, og að neðan er undirmat $\mathcal{R}_{\text{Att}}$.

$\mathcal{R}_{\text{Att}}$. Í þessu tilfelli tryggir stikaða Lyapunov-fallið að

$$\limsup_{t\longrightarrow+\infty} \|\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{\xi})\|_2 \leq b$$

fyrir sammengi allra $\mathcal{R}_c$, þ.a. $\mathcal{R}_c := V^{-1}([0,c])\cup\mathcal{D}$ sé þjappað í $\mathcal{V}$, og $b>0$ má velja fyrir fram og eins lítið og vera vill. Taka skal fram að hingað til hefur höfundi alltaf tekist að stika Lyapunov-fall í grennd hnitamiðjunar ef hún er veldisvísisstöðug.

Dæmi um stikuð Lyapunov-föll og lokaorð

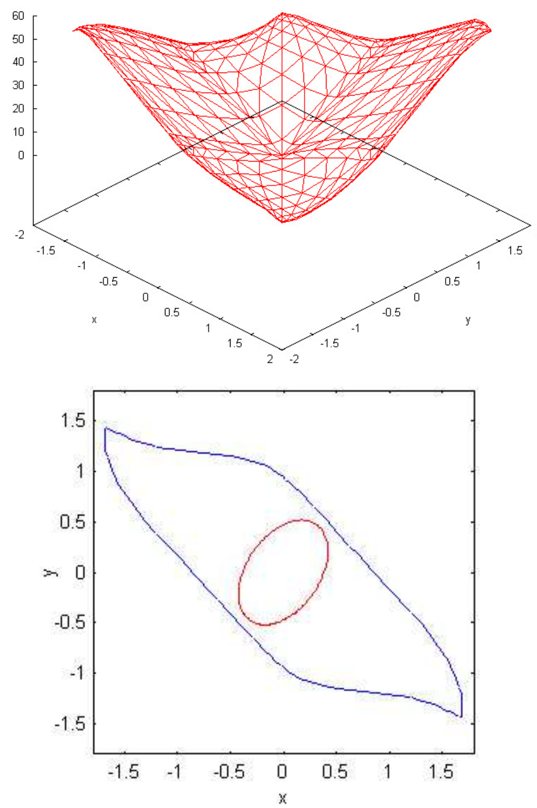
Í lok þessarar greinar er viðeigandi að sýna nokkur dæmi um notkun línulega bestunarverkefnisins við stikun Lyapunov-falla. Fyrsta dæmið er Lyapunov-fall

$$V^{Lya} : [-1.056, 1.056]^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

stikað út frá lausn línulega bestunarverkefnisins fyrir (1), þar sem

$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x - y(1-x^2+0.1x^4) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Á mynd 1 er graf stikaða Lyapunov-fallsins teiknað að ofan og að neðan er samanburður á undirmati $\mathcal{R}_{\text{Att}}$ samkvæmt stikaða Lyapunov-fallinu (stærra mengið) og venjulega fernings Lyapunov-fallinu $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P\mathbf{x}$ (sporbaugurinn), þar sem P er lausn jöfnunnar (5).



Mynd 2. Að ofan er graf Lyapunov-falls fyrir verkefni (9), stikað út frá lausn viðkomandi bestunarverkefnis, og að neðan er undirmat $\mathcal{R}_{\text{Att}}$.

Annað dæmið er stikað Lyapunov-fall,

$$V^{Lya} : [-1.686, 1.686]^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

fyrir (1), þar sem

$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ -x + \frac{1}{3}x^3 - y \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Á mynd 2 eru sýndar samskonar myndir fyrir þetta fall og eru á mynd 1.

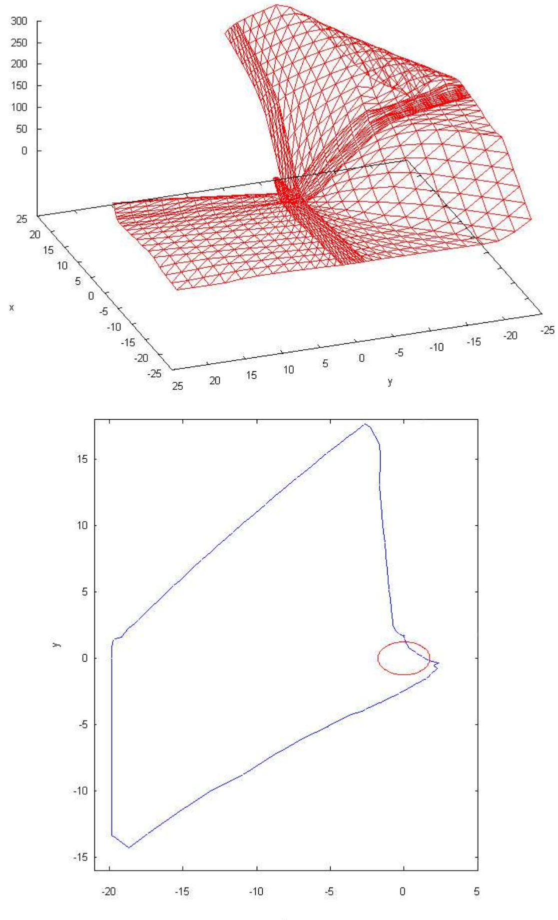
Á mynd 3 eru sömu upplýsingar og á mynd 1 og mynd 2 fyrir stikað Lyapunov-fall,

$$V^{Lya} : \left([-23.967, 23.968]^2 \setminus \mathbb{R}^2_{>0}\right) \bigcup [0, 1.647]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

fyrir (1), þar sem

$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} -2x + xy \\ -y + xy \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Í þessu tilfelli er ekki hægt að nota (stórt) ferningslaga skilgreiningarmengi því kerfið hefur annan jafnvægispunkt (söðulpunkt) í $(1,2)$.



Mynd 3. Að ofan er graf Lyapunov-falls fyrir verkefni (10), stikað út frá lausn viðkomandi bestunarverkefnis, og að neðan er undirmat $\mathcal{R}_{\text{Att}}$.

Síðasta dæmið er stikað Lyapunov-fall,

$$V^{Lya} : [-1,1]^n \setminus]-0.133, 0.133[^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

fyrir (1), þar sem

$$\mathbf{f}(x,y) := \begin{pmatrix} x^3(y-1) \\ -\frac{x^4}{(1+x^2)^2} - \frac{y}{1+y^2} \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

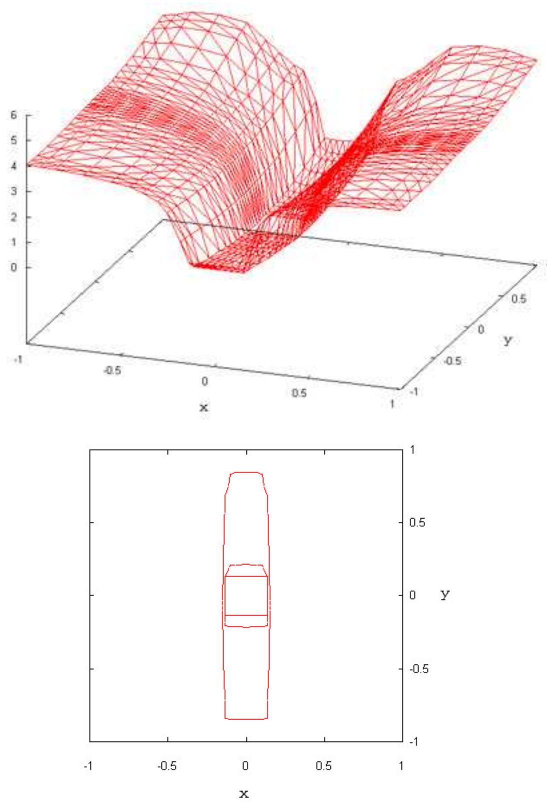
Í þessu dæmi er hnitamiðjan einungis aðfellustöðugur jafnvægispunktur og ekki veldisvísisstöðugur eins og í dæmunum á undan. Það er því ekki hægt að nota jöfnu (5) til að reikna út staðbundið Lyapunov-fall. Á mynd 4 er graf stikaða Lyapunov-fallsins teiknað. Í miðjunni á neðri myndinni er ferningurinn það svæði þar sem Lyapunov-fallið er ekki skilgreint, minna svæðið sem umlykur ferninginn er það aðdráttarmengi sem Lyapunov-fallið tryggir og stærsta svæðið á myndinni er undirmat Lyapunov-fallsins á mengi þeirra punkta sem dragast að aðdráttarmenginu.

Til marks um notagildi þeirra aðferða sem hér hafa verið kynntar vísum við á nokkrar athugasemdir í fagtímaritum og bókum. Þannig ritar hinn þekkti þýska stærðfræðingur Wolfgang Walter í bók sinni [14] um venjulegar deildarjöfnur: „*Determining, or at least estimating, the domain of attraction is a problem of great practical importance.*“ og „*There is no general recipe for constructing Lyapunov functions. In specific cases one may rely on experience and examples; some imagination is also helpful.*“ Þær niðurstöður sem hér hefur verið fjallað um ættu að reynast notadrjúgar í stýrifræði og öðrum stærð-, raunvísinda- og verkfræðigreinum þar sem venjulegar deildarjöfnur og stöðugleikar jafnvægispunkta koma mikið við sögu.

Aðrir eru enn svartsýnni, Hassan K. Khalil ritar 1992 um andhverfusetningarnar í [4]: „*Most of these converse theorems are proved by actually constructing auxiliary functions that satisfy the conditions of the respective theorems. Unfortunately, almost always this construction assumes the knowledge of the solutions of the differential equation. Therefore, these theorems do not help in the practical search for an auxiliary function. The mere knowledge that a function exists is, however, better than nothing. At least we know that our search is not hopeless.*“

Á heimasíðu höfundar http://www.traffic.uni-duisburg.de/$\sim$hafstein er C++ kóði til að stika n-víð Lyapunov-föll og teikna stikuð tvívíð Lyapunov-föll. Þeir sem hafa áhuga á að reikna út Lyapunov-föll fyrir önnur kerfi en í dæmunum hér eru hvattir til þess. Það er mögulegt að alhæfa þær niðurstöður sem hér voru kynntar fyrir tímaháðar venjulegar deildarjöfnur og tímaháð Lyapunov-föll og er það eitt af vísindalegum viðfangsefnum höfundar.

Summary: A linear programming problem is presented, of which every feasible solution parameterizes a Lyapunov-function for the autonomous dynamical system $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ in question. The only restriction is that the function $\mathbf{f}$ should be of class $\mathcal{C}^2$. Further, a constructive converse Lyapunov theorem based on the linear programming problem is discussed. The theorem is proved by shoving that if the origin is an asymptotically stable equilibrium point, then it is possible to assign values to the constants and variables of the linear programming problem, such that the constraints of the linear programming problem are fulfilled. Several examples of Lyapunov-functions parameterized by the linear programming problem are given.



Mynd 4. Til vinstri er graf stikaðs Lyapunov-falls fyrir (11) og til hægri er hið tilheyrandi aðdráttarmengi og undirmat $\mathcal{R}_{\mathrm{Att}}$.

Heimildir

[1] S. Hafstein, A constructive converse Lyapunov theorem on exponential stability, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A, 10-3 (2004), 657–678.

[2] S. Hafstein, A constructive converse Lyapunov theorem on asymptotically stable differential equations' stability, Schriftenreihe des Instituts für Mathematik, SM-DU-576 (2004).

[3] W. Hahn, Stability of Motion, Springer, 1967.

[4] H. Khalil, Nonlinear systems, Macmillan, 1992.

[5] A. Lyapunov, The general problem of the stability of motion, International Journal of Control, 55 (1992), 531–773.

[6] I. Malkin, On a question of reversability of Liapunov's theorem on asymptotic stability, in J. Aggarwal and M. Vidyasagar (Eds.), Nonlinear Systems: Stability Analysis, Dowden, 1977, 161–170.

[7] S. Marinosson, Stability Analysis of Nonlinear Systems with Linear Programming: A Lyapunov Functions Based Approach, Gerhard-Mercator-University, Duisburg, 2002
(available online at http://www.traffic.uni-duisburg.de/∼hafstein)

[8] S. Marinosson, Lyapunov function construction for ordinary differential equations with linear programming, Dynamical Systems: An International Journal, 17 (2002), 137–150.

[9] J. Massera, On Liapunoff's conditions of stability, Ann. Math., 50 (1949), 705–721.

[10] J. Massera, Contributions to stability theory, Ann. Math., 64 (1956), 182–206.

[11] C. Roos, T. Terlaky og J. Vial, Theory and Algorithms for Linear Optimization, Wiley, 1997.

[12] A. Schrijver, Theory of Linear and Integer Programming, Wiley, 1983.

[13] M. Vidyasagar, Nonlinear System Analysis, Prentice Hall, 1993.

[14] W. Walter, Ordinary Differential Equations, Springer, 1998.

Um höfundinn: Sigurður Freyr Hafstein er fæddur í Reykjavík 1973 og lauk stúdentsprófi frá Menntaskólanum í Reykjavík 1993. Hann nam stærð- og eðlisfræði við Háskóla Íslands 1993-1994 og við Georg-August Háskólann í Göttingen 1994-1996 þar sem hann lauk vordiplom prófi í stærðfræði. Hann nam stærðfræði við Gerhard-Mercator Háskólann í Duisburg 1996-1998 þar sem hann lauk Dipl.-Math. prófi 1998 og Dr. rer. nat. prófi 2002. Samhliða ritun doktorsritgerðarinnar vann hann að umferðar- og flutningarannsóknarverkefnum fyrir Westdeutsche Landesbank og Deutsche Bahn - Cargo og fékk styrk frá Deutsche Vorschungsgemeinschaft til rannsókna á hluta þess efnis sem hér var fjallað um. Frá 2001 hefur Sigurður unnið hjá eðlisfræðideild Gerhard-Mercators Háskólans, sem eftir sameiningu við Háskólann í Essen heitir Háskóli Duisburg-Essen, við rannsóknir, hönnun og forritun umferðarhermis fyrir hraðbrautakerfi sambandsríkisins Nordrhein-Westfalen.

Department of Theoretical Physics
Lotharstr. 1
Duisburg 47057
Þýskaland
hafstein@traffic.uni-duisburg.de

Móttekin: 19. janúar 2004

Viðauki

Hér verður farið nokkuð nákvæmara í stærðfræðina á bakvið niðurstöður þessarar greinar. Fyrir fullan skilning á stærðfræðinni er þó mælt með lestri [1, 2, 7, 8] þar sem því sama eru gerð mun betri skil. Fyrst skilgreinum við hyrnubútun á $\mathbb{R}^n$ og fallamengi sammfelldra línlegra falla á köflum CPWA (continuous piecewise affine) á þessari bútun. Línulega bestunarverkefnið $\mathbf{LP}(\mathbf{f}, d, \mathbf{y}, \|\cdot\|)$ til smíði Lyapunov-falls fyrir afleiðujöfnuhneppið (1) er sett fram og útdráttur á sönnun á því að gjaldgeng lausn línulega bestunarverkefnisins stiki CPWA Lyapuov-fall fyrir (1). Að lokum gefum við einfaldaða sönnun á því að ef hnitamiðjan er aðfellustöðugur jafnvægispunktur (1), þá er hægt að gefa föstum og breytum $\mathbf{LP}(\mathbf{f}, d, \mathbf{y}, \|\cdot\|)$ tölugildi þ.a. skorður verkefnisins séu uppfylltar. Það síðara er hægt að nota til að hanna einföld reiknirit sem tryggja það að ávallt sé hægt stika Lyapunov-fall með línulega bestunarverkefninu [2].

Fallamengið CPWA

Látum $N > 0$ vera heila tölu og $0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_N$ vera rauntölur. Þá er augljóslega til nákvæmlega eitt samfellt fall $P : [0, N] \longrightarrow [0, y_N]$ þ.a. einskorðun P á sérhvert bil $[i, i+1]$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, er línuleg, og þannig að $P(i) = y_i$ fyrir öll $i = 0, 1, \ldots, N$. Við skilgreinum fallið **PS** $: [-N, N]^n \longrightarrow [-y_N, y_N]^n$ með formúlinni

$$\mathbf{PS}(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sign}(x_i) P(|x_i|) \mathbf{e}_i,$$

þar sem $\mathbf{e}_i$ táknar i-ta einingarvektorinn í $\mathbb{R}^n$ og $\operatorname{sign}(x)$ er 1 ef $x \geq 0$ og annars -1. Við táknum með Sym_n uppstokkunargrúppu $\{1, 2, \ldots, n\}$ og skilgreinum fyrir sérhvert $\sigma \in \mathrm{Sym}_n$ hyrnuna

$$S_\sigma := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \big| \ 0 \leq y_{\sigma(1)} \leq y_{\sigma(2)} \leq \ldots \leq y_{\sigma(n)} \leq 1\}.$$

Að lokum táknum við með $\mathfrak{P}(\{1, 2, \ldots, n\})$ veldismengi $\{1, 2, \ldots, n\}$ og skilgreinum fyrir sérhvert $\mathcal{J} \in \mathfrak{P}(\{1, 2, \ldots, n\})$ fallið $\mathbf{R}^{\mathcal{J}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ með

$$\mathbf{R}^{\mathcal{J}}(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\chi_{\mathcal{J}}(i)} x_i \mathbf{e}_i,$$

þar sem $\chi_{\mathcal{J}} : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{0, 1\}$ er kennifall (characteristic function) mengisins $\mathcal{J}$. Samfellt fall $G : [-y_N, y_N]^n \longrightarrow \mathbb{R}$ er stak í CPWA[**PS**, $[-N, N]^n$], þ.þ.a.a. einskorðun þess $G|_{\mathbf{PS}(\mathbf{R}^{\mathcal{J}}(\mathbf{z}+S_\sigma))}$ á mengið $\mathbf{PS}(\mathbf{R}^{\mathcal{J}}(\mathbf{z} + S_\sigma))$ sé línuleg fyrir sérhvert $\mathcal{J} \in \mathfrak{P}(\{1, 2, \ldots, n\})$, sérhvert $\sigma \in \mathrm{Sym}_n$ og sérhvert $\mathbf{z} \in \{0, 1, \ldots, N-1\}^n$. Í kafla 4 í [7] er sannað að

$$\mathrm{CPWA}[\mathbf{PS}, [-N, N]^n] \longrightarrow \mathbb{R}^{(2N+1)^n}, \ \ G \mapsto (a_{\mathbf{z}})_{\mathbf{z} \in \{-N, -N+1, \ldots, N\}^n},$$

þar sem $a_{\mathbf{z}} = G(\mathbf{PS}(\mathbf{z}))$ fyrir öll $\mathbf{z} \in \{-N, -N+1, \ldots, N\}^n$, sé einsmótun vigurrúma. Af þessu leiðir að fall í CPWA[**PS**, $[-N, N]^n$] er skynsamlega skilgreint og ótvírætt ákvarðað af gildum sínum á strjála menginu $\{-y_N, -y_{N-1}, \ldots, y_0, y_1, \ldots, y_N\}^n$.

Línulega bestunarverkefnið $\mathbf{LP}(\mathbf{f}, d, \mathbf{y}, \|\cdot\|)$

Lítum á kerfið (1). Látum $N > 0$ vera heiltölu og $0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_N$ vera rauntölur þ.a. $[-y_N, y_N]^n \subset \mathcal{U}$. Við skilgreinum **PS** $: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ með hjálp fastanna $y_0, y_1, \ldots, y_N$ eins og að ofan og látum d vera heiltölu, $0 \leq d < N$. Við látum $\|\cdot\|$ vera eitthvert norm á $\mathbb{R}^n$. Línulega bestunarverkefnið $\mathbf{LP}(\mathbf{f}, d, \mathbf{y}, \|\cdot\|)$ er nú smíðað á eftirfarandi hátt:

i) Við skilgreinum mengin

$$\mathcal{X}^{\|\cdot\|} := \{\|\mathbf{x}\| \big| \ \mathbf{x} \in \{y_0, y_1, \ldots, y_N\}^n\}$$

og

$$\mathcal{G} := \{-y_N, -y_{N-1}, \ldots, y_0, y_1, \ldots, y_N\}^n \setminus \{-y_{d-1}, -y_{d-2}, \ldots, y_0, y_1, \ldots, y_{d-1}\}^n.$$

ii) *Fyrir sérhvert* $\sigma \in \mathrm{Sym}_n$ *og sérhvert* $i = 1, 2, \dots, n+1$ *skilgreinum við vigurinn*

$$\mathbf{x}_i^\sigma := \sum_{j=i}^{n} \mathbf{e}_{\sigma(j)}.$$

iii) *Við skilgreinum mengið*

$$\mathcal{Z} := [\{0, 1, \dots, N-1\}^n \setminus \{0, 1, \dots, d-1\}^n] \times \mathfrak{P}(\{1, 2, \dots, n\}).$$

iv) *Fyrir sérhvert* $(\mathbf{z}, \mathcal{J}) \in \mathcal{Z}$ *skilgreinum við vigurinn*

$$\mathbf{y}_{\sigma,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})} := \mathbf{PS}(\mathbf{R}^{\mathcal{J}}(\mathbf{z} + \mathbf{x}_i^\sigma))$$

fyrir sérhvert $\sigma \in \mathrm{Sym}_n$ *og sérhvert* $i = 1, 2, \dots, n+1$.

v) *Við skilgreinum mengi allra nágrannapunkta* $\mathcal{G}$ *sem*

$$\mathcal{Y} := \{\{\mathbf{y}_{\sigma,k}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}, \mathbf{y}_{\sigma,k+1}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}\} \big| (\mathbf{z}, \mathcal{J}) \in \mathcal{Z} \text{ og } k \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

vi) *Fyrir sérhvert* $(\mathbf{z}, \mathcal{J}) \in \mathcal{Z}$ *og sérhvert* $r, s = 1, 2, \dots, n$ *látum við* $B_{rs}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}$ *vera rauntölufasta þ.a. ójafnan*

$$B_{rs}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})} \geq \max_{i=1,2,\dots,n} \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{PS}(\mathbf{R}^{\mathcal{J}}(\mathbf{z}+\,]0,1[^n))} \left| \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_r \partial x_s}(\mathbf{x}) \right|$$

sé uppfyllt.

vii) *Fyrir sérhvert* $(\mathbf{z}, \mathcal{J}) \in \mathcal{Z}$*, sérhvert* $k, i = 1, 2, \dots, n$ *og sérhvert* $\sigma \in \mathrm{Sym}_n$ *skilgreinum við*

$$A_{\sigma,k,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})} := |\mathbf{e}_k \cdot (\mathbf{y}_{\sigma,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})} - \mathbf{y}_{\sigma,n+1}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})})|.$$

viii) *Við látum* $\varepsilon > 0$ *og* $\delta > 0$ *vera einhverja rauntölufasta.*

Breytur línulega bestunarverkefnisins eru:

$$\begin{aligned} &\Psi[x], \ \text{fyrir öll } x \in \mathcal{X}^{\|\cdot\|}, \\ &\Gamma[x], \ \text{fyrir öll } x \in \mathcal{X}^{\|\cdot\|}, \\ &V[\mathbf{x}], \ \text{fyrir öll } \mathbf{x} \in \mathcal{G}, \\ &C[\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}], \ \text{fyrir öll } \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathcal{Y}. \end{aligned}$$

Skorður línulega bestunarverkefnisins eru:

LC1) *Látum* $x_1, x_2, \dots, x_K$ *vera stök* $\mathcal{X}^{\|\cdot\|}$ *í vaxandi röð. Þá eru skorðurnar*

$$\begin{aligned} &\Psi[x_1] = \Gamma[x_1] = 0, \\ &\varepsilon x_2 \leq \Psi[x_2], \\ &\varepsilon x_2 \leq \Gamma[x_2] \end{aligned}$$

og fyrir sérhvert $i = 2, 3, \dots, K-1$*:*

$$\frac{\Psi[x_i] - \Psi[x_{i-1}]}{x_i - x_{i-1}} \leq \frac{\Psi[x_{i+1}] - \Psi[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

og

$$\frac{\Gamma[x_i] - \Gamma[x_{i-1}]}{x_i - x_{i-1}} \leq \frac{\Gamma[x_{i+1}] - \Gamma[x_i]}{x_{i+1} - x_i}.$$

LC2) *Fyrir sérhvert* $\mathbf{x} \in \mathcal{G}$*:*

$$\Psi[\|\mathbf{x}\|] \leq V[\mathbf{x}].$$

Ef $d = 0$ *setjum við*

$$V[\mathbf{0}] = 0.$$

Ef $d \geq 1$ *þá setjum við fyrir sérhvert* $\mathbf{x} \in \mathcal{G} \cap \{-y_d, -y_{d-1}, \dots, y_0, y_1, \dots, y_d\}^n$*:*

$$V[\mathbf{x}] \leq \Psi[\min_{\|\mathbf{y}\|_\infty = y_N} \|\mathbf{y}\|] - \delta.$$

LC3) *Fyrir sérhvert* $\{\mathbf{x},\mathbf{y}\} \in \mathcal{Y}$*:*

$$-C[\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}] \cdot \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_\infty \leq V[\mathbf{x}] - V[\mathbf{y}] \leq C[\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}] \cdot \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_\infty.$$

LC4) *Fyrir sérhvert* $(\mathbf{z},\mathcal{J}) \in \mathcal{Z}$*, sérhvert* $\sigma \in \mathrm{Sym}_n$ *og sérhvert* $i = 1, 2, \ldots, n+1$*:*

$$\begin{aligned}-\Gamma[\|\mathbf{y}_{\sigma,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}\|] \geq & \sum_{j=1}^{n} \frac{V[\mathbf{y}_{\sigma,j}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}] - V[\mathbf{y}_{\sigma,j+1}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}]}{\mathbf{e}_{\sigma(j)} \cdot (\mathbf{y}_{\sigma,j}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})} - \mathbf{y}_{\sigma,j+1}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})})} f_{\sigma(j)}(\mathbf{y}_{\sigma,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{n} B_{rs}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})} A_{\sigma,r,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})} (A_{\sigma,s,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})} + A_{\sigma,s,1}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}) \sum_{j=1}^{n} C[\{\mathbf{y}_{\sigma,j}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}, \mathbf{y}_{\sigma,j+1}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}\}].\end{aligned}$$

Tölugildi fastanna $\varepsilon > 0$ og $\delta > 0$ hafa ekki áhrif á það hvort línulega bestunarverkefnið hefur gjaldgenga lausn eða ekki. Ef til er gjaldgeng lausn fyrir einhver tölugildi $\varepsilon := \varepsilon' > 0$ og $\delta := \delta' > 0$, þá er til lausn fyrir öll tölugildi $\varepsilon := \varepsilon^* > 0$ og $\delta := \delta^* > 0$. Til að sjá þetta er nóg að margfalda öll tölugildi breytanna í gjaldgengu lausninni með $\max\{\varepsilon^*/\varepsilon', \delta^*/\delta'\}$. Það er engin þörf fyrir kostnaðarfall línulega bestunarverkefnisins til smíði Lyapunov-fallsins, en það er hægt að nota það til þess að taka ákveðin Lyapunov-föll fram yfir önnur.

Gerum nú ráð fyrir því að við þekkjum einhverja gjaldgenga lausn línulega bestunarverkefnisins. Þá getum við notað gildi breytanna í gjaldgengu lausninni til þess að skilgreina föllin $\psi, \gamma : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ og $V^{Lya} : [-y_N, y_N]^n \longrightarrow \mathbb{R}$ á eftirfarandi hátt:

Látum sem fyrr $x_1, x_2, \ldots, x_K$ vera stök $\mathcal{X}^{\|\cdot\|}$ í vaxandi röð og skilgreinum línuföll á köflum með

$$\psi(y) := \Psi[x_i] + \frac{\Psi[x_{i+1}] - \Psi[x_i]}{x_{i+1} - x_i}(y - x_i)$$

og

$$\gamma(y) := \Gamma[x_i] + \frac{\Gamma[x_{i+1}] - \Gamma[x_i]}{x_{i+1} - x_i}(y - x_i),$$

fyrir öll $y \in [x_i, x_{i+1}]$ og öll $i = 1, 2, \ldots, K-1$. Fallgildi ψ og γ á $]x_K, +\infty[$ skipta litlu máli, en til að hafa all rétt skilgreint setjum við

$$\psi(y) := \Psi[x_{K-1}] + \frac{\Psi[x_K] - \Psi[x_{K-1}]}{x_K - x_{K-1}}(y - x_{K-1})$$

og

$$\gamma(y) := \Gamma[x_{K-1}] + \frac{\Gamma[x_K] - \Gamma[x_{K-1}]}{x_K - x_{K-1}}(y - x_{K-1})$$

fyrir öll $y > x_K$. Fallið $V^{Lya} \in \mathrm{CPWA}[$**PS**$, [-N, N]^n]$ er skilgreint með því að setja

$$V^{Lya}(\mathbf{x}) := V[\mathbf{x}]$$

fyrir öll $\mathbf{x} \in \mathcal{G}$.

Það er ekki erfitt að sjá að af **LC1** leiðir að ψ and γ eru stranglega vaxandi kúpt (convex) föll og að af **LC2** leiðir að

$$\psi(\|\mathbf{x}\|) \leq V^{Lya}(\mathbf{x})$$

fyrir öll $\mathbf{x} \in [-y_N, y_N]^n \setminus]-y_d, y_d[^n$. Þar með er sýnt fram á að fallið V^{Lya} uppfyllir skilyrðið **(L1)** á $[-y_N, y_N]^n \setminus]-y_d, y_d[^n$.

Við snúum okkur nú að því að sýna fram á að V^{Lya} uppfylli skilyrðið **(L2)** á $[-y_N, y_N]^n \setminus]-y_d, y_d[^n$. Til þess veljum við eitthvert $\mathbf{x} \in [-y_N, y_N]^n \setminus]-y_d, y_d[^n$ af handahófi. Þá eru til, e.t.v. fleiri en eitt, $(\mathbf{z}, \mathcal{J}) \in \mathcal{Z}$ og $\sigma \in \mathrm{Sym}_n$ þ.a. $\mathbf{x}$ er í hyrnunni $\mathcal{H}$ sem spönnuð er af $\mathbf{y}_{\sigma,1}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}, \mathbf{y}_{\sigma,2}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}, .., \mathbf{y}_{\sigma,n+1}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}$. Þetta þýðir að til eru fastar $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ á bilinu $[0, 1]$ þ.a.

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \mathbf{y}_{\sigma,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})} \quad \text{og} \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1.$$

Af því að einskorðun V^{Lya} á hyrnuna $\mathcal{H}$ er línuleg er til vigur $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ og fasti $a \in \mathbb{R}$ þ.a. $V^{Lya}(\mathbf{y}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{y} + a$ fyrir öll $\mathbf{y}$ í hyrnunni $\mathcal{H}$ og af **LC3** leiðir að

$$\|\mathbf{w}\|_1 = \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{V[\mathbf{y}_{\sigma,j}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}] - V[\mathbf{y}_{\sigma,j+1}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}]}{\mathbf{e}_{\sigma(j)} \cdot (\mathbf{y}_{\sigma,j}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})} - \mathbf{y}_{\sigma,j+1}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})})} \mathbf{e}_{\sigma(j)} \right\|_1 \leq \sum_{j=1}^{n} C[\{\mathbf{y}_{\sigma,j}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}, \mathbf{y}_{\sigma,j+1}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}\}].$$

Í [7, 8] er sannað að

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \mathbf{f}(\mathbf{y}_{\sigma,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})})\|_\infty \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \sum_{r,s=1}^{n} B_{rs}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})} A_{\sigma,r,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})} (A_{\sigma,s,1}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})} + A_{\sigma,s,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})})$$

svo

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}_{\sigma,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}) + \mathbf{w} \cdot \left(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \mathbf{f}(\mathbf{y}_{\sigma,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}) \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}_{\sigma,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}) + \|\mathbf{w}\|_1 \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \mathbf{f}(\mathbf{y}_{\sigma,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})})\|_\infty \\
&\leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{V[\mathbf{y}_{\sigma,j}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}] - V[\mathbf{y}_{\sigma,j+1}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}]}{\mathbf{e}_{\sigma(j)} \cdot (\mathbf{y}_{\sigma,j}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})} - \mathbf{y}_{\sigma,j+1}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})})} f_{\sigma(j)}(\mathbf{y}_{\sigma,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{n} B_{rs}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})} A_{\sigma,r,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})} (A_{\sigma,s,1}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})} + A_{\sigma,s,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}) \sum_{j=1}^{n} C[\{\mathbf{y}_{\sigma,j}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}, \mathbf{y}_{\sigma,j+1}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}\}] \right)
\end{aligned}$$

og af þessari ójöfnu og skorðunum **LC4** leiðir að

$$-\gamma(\|\mathbf{x}\|) \geq -\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \Gamma[\|\mathbf{y}_{\sigma,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}\|] \geq \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Þar með er ljóst að V^{Lya} uppfyllir skilyrðið

$$\limsup_{s \to 0+} \frac{V^{Lya}(\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{\xi}) + s\mathbf{f}(\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{\xi}))) - V^{Lya}(\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{\xi}))}{s} \leq -\gamma(\|\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{\xi})\|),$$

á $[-y_N, y_N]^n \setminus]-y_d, y_d[^n$, þ.e. **(L2)**, og V^{Lya} er Lyapunov-fall á þessu mengi.

Sönnun á uppbyggjandi andhverfusetningu

Af setningu 24 í kafla 5.7 í [13] leiðir, að ef hnitamiðjan er aðfellustöðugur jafnvægispunktur kerfisins (1) og $a > 0$ er einhver fasti þ.a. $[-a, a]^n$ er hlutmengi aðdráttarsvæðisins $\mathcal{R}_{\text{Att}}$, þá eru til föll α, β og ω úr menginu $\mathcal{K}$ og tvisvar samfellt deildanlegt fall $W : [-a, a]^n \longrightarrow \mathbb{R}$, þ.a.

$$\alpha(\|\mathbf{x}\|) \leq W(\mathbf{x}) \leq \beta(\|\mathbf{x}\|) \quad \text{og} \quad \nabla W(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq -\omega(\|\mathbf{x}\|)$$

fyrir öll $\mathbf{x} \in]-a, a[^n$. Að auki má gera ráð fyrir því án skerðingar á víðgildi að α og ω séu kúpt föll. Við ætlum að sýna að mögulegt er að stika CPWA Lyapuov-fall fyrir (1) á menginu $[-a, a]^n \setminus \mathcal{N}$, þar sem $\mathcal{N}$ er einhver fyrirfram gefin grennd hnitamiðjunar sem má vera eins lítil og vera vill. Við sönnum þessa staðreynd með því að velja $d > 0$ og vigur $\mathbf{y}$ þ.a. $[-d, d]^n \subset \mathcal{N}$ og $\mathbf{LP}(\mathbf{f}, d, \mathbf{y}, \|\cdot\|)$ hefur gjaldgenga lausn.

Til þessa setjum við

$$x_{\min}^* := \min_{\|\mathbf{x}\|_\infty = a} \|\mathbf{x}\| \quad \text{og} \quad \delta := \frac{\alpha(x_{\min}^*)}{2}$$

og látum m^* vera minnstu náttúrulegu töluna (> 0) þ.a.

$$[-\frac{a}{2^{m^*}}, \frac{a}{2^{m^*}}]^n \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \big| \beta(\|\mathbf{x}\|) \leq \delta\} \cap \mathcal{N}.$$

Við setjum

$$x^* := \min_{\|\mathbf{x}\|_\infty = a2^{-m^*}} \|\mathbf{x}\|, \ \ \omega^* := \frac{1}{2}\omega(x^*), \ \ \varepsilon := \min\{\omega^*, \alpha(x^*)\}, \ \ C := \max_{\substack{i=1,2,\ldots,n \\ \mathbf{x}\in[-a,a]^n}} \left|\frac{\partial W}{\partial x_i}(\mathbf{x})\right|$$

og ákörðum fasta B þ.a.

$$B \geq \max_{\substack{i,k,l=1,2,\ldots,n \\ \mathbf{x}\in[-a,a]^n}} \left|\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_l}(\mathbf{x})\right|.$$

Við setjum

$$A^* := \sup_{\substack{\mathbf{x}\in[-a,a]^n \\ \mathbf{x}\neq\mathbf{0}}} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_2}{\|\mathbf{x}\|}, \ \ B^* := n \cdot \max_{\substack{k,l=1,2,\ldots,n \\ \mathbf{x}\in[-a,a]^n}} \left|\frac{\partial^2 W}{\partial x_k \partial x_l}(\mathbf{x})\right|, \ \ C^* := \frac{n^3 BC}{2}$$

og látum $m \geq m^*$ vera minnstu heilu töluna þ.a.

$$\frac{a}{2^m} \leq \frac{\sqrt{(x^*A^*B^*)^2 + 4x^*\omega^*C^*} - x^*A^*B^*}{2C^*} \tag{12}$$

og setjum

$$d := 2^{m-m^*}.$$

Að lokum setjum við $\mathbf{y} := a2^{-m}(0, 1, \ldots, 2^m)^T$ og

$$B_{rs}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})} := B, \ \text{ fyrir öll } (\mathbf{z},\mathcal{J}) \in \mathcal{Z} \text{ og öll } r, s = 1, 2, \ldots, n.$$

Þar með er búið að úthluta öllum föstum línulega bestunarverkefnisins tölugildi og ef okkur tekst að úthluta öllum breytum verkefnisins tölugildi þ.a. skorðurnar **LC1**, **LC2**, **LC3** og **LC4** séu allar uppfylltar fyrir þessi gildi á föstunum og breytunum, þá höfum við sannað uppbyggjandi andhverfusetningu. Þessi staðreynd er bein afleiðing þess að til eru reiknirit sem ávallt finna gjalgenga lausn svo framarlega að slík lausn sé til. Við úthlutum nú breytunum eftirfarandi gildi og sönnum svo að skorðurnar **LC1**, **LC2**, **LC3** og **LC4** séu allar uppfylltar fyrir þessi gildi.

Við setjum $\Psi[x] := \alpha(x)$ og $\Gamma[x] := \omega^* x$ fyrir öll $x \in \mathcal{X}^{\|\cdot\|}$ og $V[\mathbf{x}] := W(\mathbf{x})$ fyrir öll $\mathbf{x} \in \mathcal{G}$ og $C[\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}] := C$ fyrir öll $\{\mathbf{x},\mathbf{y}\} \in \mathcal{Y}$. Með þessi gildi á breytunum er auðvelt að sjá að skorðurnar **LC1** og **LC2** eru uppfylltar og að **LC3** leiðir beint af meðalgildissetningunni (mean value theorem). Við snúum okkur því beint að skorðunum **LC4** sem eru flóknasta tilvikið.

Við veljum $(\mathbf{z},\mathcal{J}) \in \mathcal{Z}$ og $\sigma \in \mathrm{Sym}_n$ af handahófi. Til að sýna að skorðan **LC4** sé uppfyllt þurfum við að sanna að

$$\begin{aligned} -\Gamma[\|\mathbf{y}_{\sigma,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}\|] \geq & \sum_{j=1}^n \frac{V[\mathbf{y}_{\sigma,j}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}] - V[\mathbf{y}_{\sigma,j+1}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}]}{\mathbf{e}_{\sigma(j)} \cdot (\mathbf{y}_{\sigma,j}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})} - \mathbf{y}_{\sigma,j+1}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})})} f_{\sigma(j)}(\mathbf{y}_{\sigma,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}) \\ & + \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^n B_{rs}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})} A_{\sigma,r,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}(A_{\sigma,s,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})} + A_{\sigma,s,1}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}) \sum_{j=1}^n C[\{\mathbf{y}_{\sigma,j}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}, \mathbf{y}_{\sigma,j+1}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}\}]. \end{aligned} \tag{13}$$

Með þeim tölugildunum sem við höfum úthlutað föstum og breytum $\mathbf{LP}(\mathbf{f}, d, \mathbf{y}, \|\cdot\|)$ er ójafnan (13) uppfyllt ef

$$-\omega^*\|\mathbf{y}_{\sigma,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}\| \geq \sum_{j=1}^n \frac{W[\mathbf{y}_{\sigma,j}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}] - W[\mathbf{y}_{\sigma,j+1}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}]}{\mathbf{e}_{\sigma(j)} \cdot (\mathbf{y}_{\sigma,j}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})} - \mathbf{y}_{\sigma,j+1}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})})} f_{\sigma(j)}(\mathbf{y}_{\sigma,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}) + h^2 C^*$$

þar sem $h := a2^{-m}$. Nú leiðir það af meðalgildissetningunni og af því að $\omega(x) \geq 2\omega^* x$ fyrir öll $x \geq x^*$ að

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} \frac{W[\mathbf{y}_{\sigma,j}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}] - W[\mathbf{y}_{\sigma,j+1}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}]}{\mathbf{e}_{\sigma(j)} \cdot (\mathbf{y}_{\sigma,j}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})} - \mathbf{y}_{\sigma,j+1}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})})} f_{\sigma(j)}(\mathbf{y}_{\sigma,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}) + h^2 C^* \\
&\quad = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{W[\mathbf{y}_{\sigma,j}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}] - W[\mathbf{y}_{\sigma,j+1}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}]}{\mathbf{e}_{\sigma(j)} \cdot (\mathbf{y}_{\sigma,j}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})} - \mathbf{y}_{\sigma,j+1}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})})} - \frac{\partial W}{\partial \xi_{\sigma(j)}}(\mathbf{y}_{\sigma,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}) \right) f_{\sigma(j)}(\mathbf{y}_{\sigma,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}) \\
&\qquad + \nabla W(\mathbf{y}_{\sigma,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}_{\sigma,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}) + h^2 C^* \\
&\quad \leq \left\| \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{W[\mathbf{y}_{\sigma,j}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}] - W[\mathbf{y}_{\sigma,j+1}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}]}{\mathbf{e}_{\sigma(j)} \cdot (\mathbf{y}_{\sigma,j}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})} - \mathbf{y}_{\sigma,j+1}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})})} - \frac{\partial W}{\partial \xi_{\sigma(j)}}(\mathbf{y}_{\sigma,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}) \right) \mathbf{e}_j \right\|_2 \|f_{\sigma(j)}(\mathbf{y}_{\sigma,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})})\|_2 \\
&\qquad - \omega(\|\mathbf{y}_{\sigma,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}\|) + h^2 C^* \\
&\quad \leq B^* h A^* \|\mathbf{y}_{\sigma,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}\| - 2\omega^* \|\mathbf{y}_{\sigma,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}\| + h^2 C^*.
\end{aligned}$$

svo ef

$$-\omega^* \|\mathbf{y}_{\sigma,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}\| \geq h A^* B^* \|\mathbf{y}_{\sigma,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}\| - 2\omega^* \|\mathbf{y}_{\sigma,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}\| + h^2 C^*,$$

þá er ójafnan (13) uppfyllt. En það að þessi síðasta ójafna er uppfyllt er afleiðing

$$0 \geq h A^* B^* - \omega^* + h^2 \frac{C^*}{x^*} \geq h A^* B^* - \omega^* + h^2 \frac{C^*}{\|\mathbf{y}_{\sigma,i}^{(\mathbf{z},\mathcal{J})}\|}.$$

sem leiðir beint af (12). Þar með er sönnununni lokið.